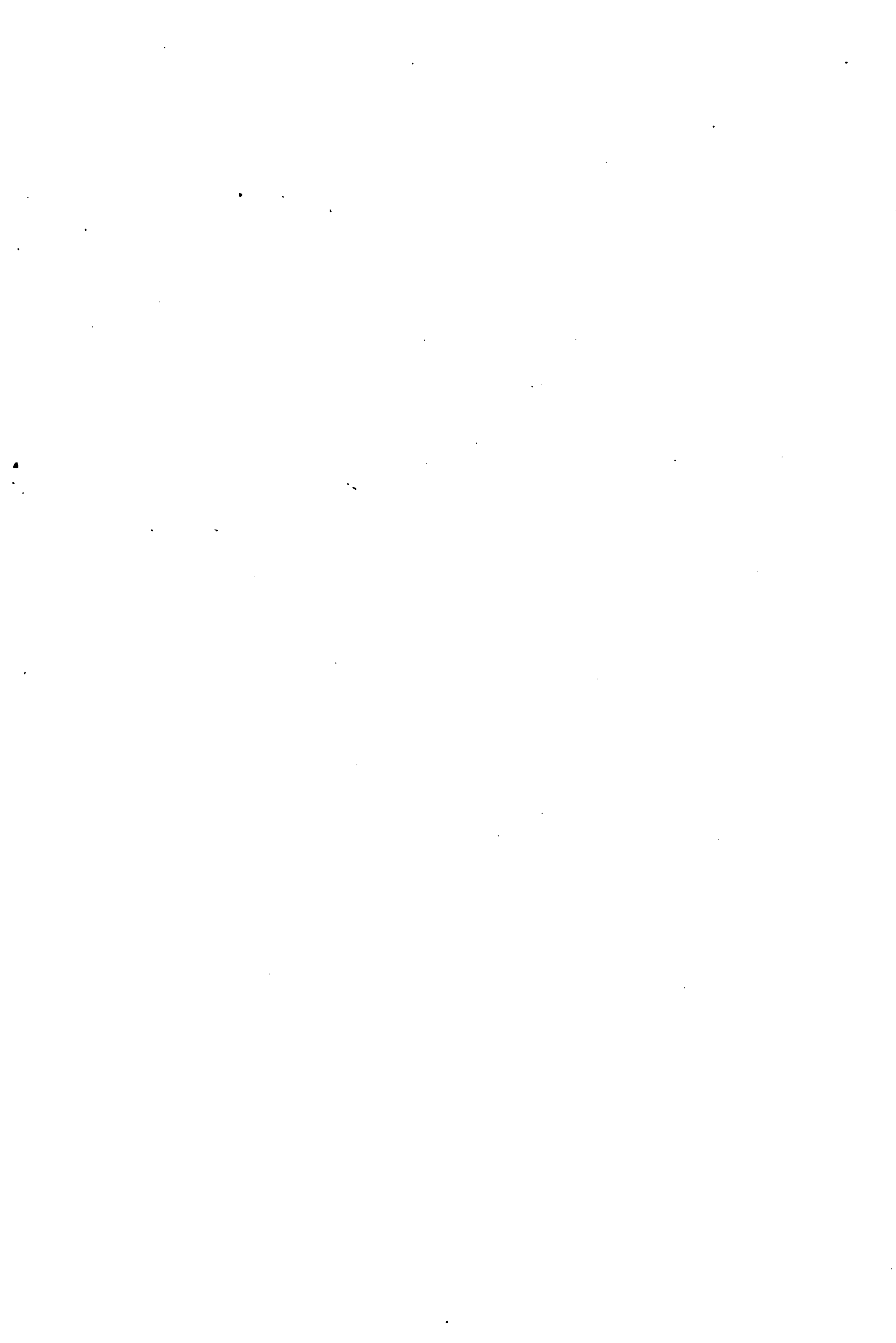
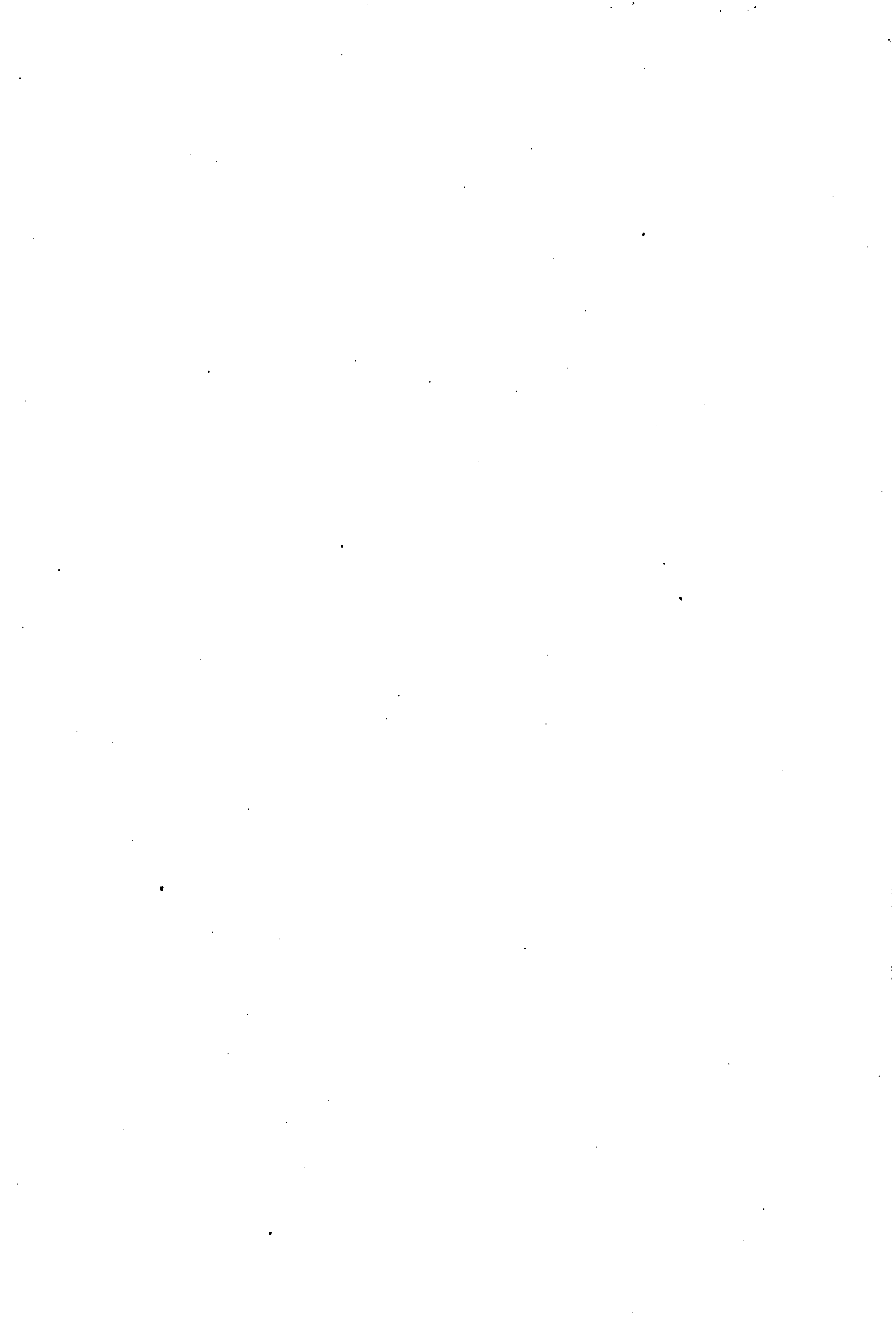

SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS





DIE

BINOMIALKOËFFICIENTEN

IN VERBINDUNG MIT

FIGURIERTEN ZAHLEN UND ARITHMETISCHEN REIHEN HÖHERER ORDNUNG.

VON

PAUL VON SCHAEWEN,

PROFESSOR AM EVANG. GYMNASIUM ZU GLOGAU.



GLOGAU.

CARL FLEMMING, VERLAG,

BUCH- UND KUNSTDRUCKEREI, A. G.

1901.

Druck von Carl Flemming, Verlag, Buch- und Kunstdruckerei, A. G., Glogau.

Vorwort.

Die nachstehende Abhandlung erschien vor zwanzig Jahren als Beilage des Programms des Gymnasiums zu Saarbrücken, wo der Verfasser von 1878—1882 als ordentlicher Lehrer angestellt war. Da alle damals hergestellten Exemplare vollständig vergriffen sind, die Abhandlung aber vielfach begehrt wird, erfolgt dieser unveränderte Abdruck jener Programmbeilage.

Glogau, im Mai 1901.

P. v. Schaewen.



Die Binomialkoëfficienten

in Verbindung mit figurierten Zahlen und arithmetischen Reihen höherer Ordnung.

§ 1.

Für jedes ganzzahlige n bestehen bekanntlich die beiden Reihenentwicklungen von cos $(n\varphi)$ nach Funktionen des einfachen Winkels

$$\cos(n\varphi) = 2^{n-1}\cos^n\varphi - n\,.\,2^{n-3}\cos^{n-2}\varphi + \frac{n}{2}\binom{n-3}{1}\,.\,2^{n-5}\cos^{n-4}\varphi -$$

$$-\frac{n}{3}\binom{n-4}{2}\,.\,2^{n-7}\cos^{n-6}\varphi + \ldots + (-1)^p\frac{n}{p}\binom{n-p-1}{p-1}\,.\,2^{n-2p-1}\cos^{n-2p}\varphi + \ldots$$

und $$\cos(n\varphi) = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi -$$

$$-\binom{n}{6}\cos^{n-6}\varphi\sin^6\varphi + \ldots + (-1)^p\binom{n}{2p}\cos^{n-2p}\varphi\sin^{2p}\varphi + \ldots$$

Die erste Reihe enthält nur Potenzen von cos φ, die zweite ausser den Potenzen von cos φ noch die geraden Potenzen von sin φ.

Setzt man nun in der zweiten Reihe

$$\sin^{2h}\varphi = (1-\cos^2\varphi)^h$$

und entwickelt nach dem binomischen Lehrsatze, so erhält man noch eine zweite Reihe für cos $(n\varphi)$, welche nur die Potenzen von cos φ enthält. Beide Darstellungen von cos $(n\varphi)$ müssen identisch gleich sein, d. h. es müssen die Koëfficienten gleicher Potenzen von cos φ in beiden Reihen einander gleich sein. Durch Gleichsetzung der Koëfficienten von $\cos^{n-2h}\varphi$ erhält man die Gleichung

$$\binom{h}{0}\binom{n}{2h}+\binom{h+1}{1}\binom{n}{2h+2}+\binom{h+2}{2}\binom{n}{2h+4}+\cdots$$
$$=\frac{n}{h}\binom{n-h-1}{h-1}\cdot 2^{n-2h-1}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Summe von Produkten aus den figurierten Zahlen h-ter Ordnung[1]) und Binomialkoëfficienten n-ter Potenz mit geradem Index. Für die rechte Seite kann man, um die Unbestimmtheit für $h = 0$ zu vermeiden, auch schreiben

$$\frac{n}{n-2h}\binom{n-h-1}{h}\cdot 2^{n-2h-1}.$$

Wenn man für h der Reihe nach 0, 1, 2, 3, . . . setzt, so gewinnt man die Gleichungen

a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\binom{n}{6}+\binom{n}{8}+\binom{n}{10}+\cdots=2^{n-1}$

b) $\binom{n}{2}+2\binom{n}{4}+3\binom{n}{6}+4\binom{n}{8}+5\binom{n}{10}+\cdots=n\cdot 2^{n-3}$

c) $\binom{n}{4}+3\binom{n}{6}+6\binom{n}{8}+10\binom{n}{10}+\cdots=\frac{n(n-3)}{1.2}\cdot 2^{n-5}$

d) $\binom{n}{6}+4\binom{n}{8}+10\binom{n}{10}+\cdots=\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}\cdot 2^{n-7}$

u. s. w.

Aus diesen Gleichungen erhält man unzählige andere, wenn man sie in geeigneter Weise kombiniert. So erhält man durch gehörige Kombination z. B. Reihen, welche die figurierten Zahlen einer bestimmten Ordnung und die sämtlichen Binomialkoëfficienten n-ter Potenz mit geradem Index enthalten. Es liefert

a + b:

$$\binom{n}{0}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{4}+4\binom{n}{6}+5\binom{n}{8}+\cdots=(n+4)\cdot 2^{n-3}$$

a + 2b + c:

$$\binom{n}{0}+3\binom{n}{2}+6\binom{n}{4}+10\binom{n}{6}+15\binom{n}{8}+\cdots$$
$$=\frac{n^2+13n+32}{1.2}\cdot 2^{n-5}$$

$a + 3b + 3c + d$:

$$\binom{n}{0} + 4\binom{n}{2} + 10\binom{n}{4} + 20\binom{n}{6} + 35\binom{n}{8} + \dots$$

$$= \frac{n^3 + 27\,n^2 + 200\,n + 384}{1\,.\,2\,.\,3} \,.\, 2^{n-7}$$

u. s. w.

---

§ 2.

Allgemein gelten, wenn n eine ganze Zahl ist, für $\frac{\sin(n\,\varphi)}{\sin\,\varphi}$ die beiden Reihenentwicklungen nach Funktionen des einfachen Winkels

$$\frac{\sin(n\,\varphi)}{\sin\,\varphi} = 2^{n-1}\cos^{n-1}\varphi - \binom{n-2}{1}2^{n-3}\cos^{n-3}\varphi + \binom{n-3}{2}2^{n-5}\cos^{n-5}\varphi -$$

$$- \binom{n-4}{3}2^{n-7}\cos^{n-7}\varphi + \dots + (-1)^p\binom{n-p-1}{p}2^{n-2p-1}\,.\,\cos^{n-2p-1}\varphi + \dots$$

und $$\frac{\sin(n\,\varphi)}{\sin\,\varphi} = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^2\varphi + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\sin^4\varphi -$$

$$- \binom{n}{7}\cos^{n-7}\varphi\sin^6\varphi + \dots + (-1)^p\binom{n}{2p+1}\cos^{n-2p-1}\varphi\sin^{2p}\varphi + \dots$$

Wenn man nun ebenso wie in § 1 verfährt, wenn man nämlich in der zweiten Reihe

$$\sin^{2h}\varphi = (1 - \cos^2\varphi)^h$$

setzt und nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, so erhält man eine zweite Darstellung von $\frac{\sin(n\,\varphi)}{\sin\,\varphi}$ als Reihe, welche nur die Potenzen von $\cos\varphi$ enthält. Setzt man in dieser und der ersten Reihe die Koëfficienten von $\cos^{n-2h}\varphi$ einander gleich, so wird die Gleichung gewonnen[2])

$$\binom{h}{0}\binom{n}{2h+1} + \binom{h+1}{1}\binom{n}{2h+3} + \binom{h+2}{2}\binom{n}{2h+5} + \dots = \binom{n-h-1}{h}\,.\,2^{n-2h-1}\,.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Summe von Produkten aus den figurierten Zahlen h-ter Ordnung und Binomial-

koëfficienten n-ter Potenz mit ungeradem Index. Wenn man für h der Reihe nach 0, 1, 2, 3, ... setzt, so erhält man die Gleichungen

$$\mathfrak{a})\ \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\binom{n}{7}+\binom{n}{9}+\binom{n}{11}+\ldots=2^{n-1}$$

$$\mathfrak{b})\ \binom{n}{3}+2\binom{n}{5}+3\binom{n}{7}+4\binom{n}{9}+5\binom{n}{11}+\ldots=(n-2)\,.\,2^{n-3}$$

$$\mathfrak{c})\ \binom{n}{5}+3\binom{n}{7}+6\binom{n}{9}+10\binom{n}{11}+\ldots=\frac{(n-3)\ (n-4)}{1\,.\,2}\,.\,2^{n-5}$$

$$\mathfrak{d})\ \binom{n}{7}+4\binom{n}{9}+10\binom{n}{11}+\ldots=\frac{(n-4)\,(n-5)\,(n-6)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,2^{n-7}$$

u. s. w.

Auch aus diesen Gleichungen können beliebig viele andere durch Kombination abgeleitet werden. So kann man z. B. die Gleichungen aufstellen, welche die figurierten Zahlen einer bestimmten Ordnung und die sämtlichen Binomialkoëfficienten n-ter Potenz mit ungeradem Index enthalten. Es giebt

$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$:

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{3}+3\binom{n}{5}+4\binom{n}{7}+5\binom{n}{9}+\ldots=(n+2)\,.\,2^{n-3}$$

$\mathfrak{a}+2\,\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$:

$$\binom{n}{1}+3\binom{n}{3}+6\binom{n}{5}+10\binom{n}{7}+15\binom{n}{9}+\ldots=\frac{n^2+9\,n+12}{1\,.\,2}\,.\,2^{n-5}$$

$\mathfrak{a}+3\,\mathfrak{b}+3\,\mathfrak{c}+\mathfrak{d}$:

$$\binom{n}{1}+4\binom{n}{3}+10\binom{n}{5}+20\binom{n}{7}+35\binom{n}{9}+\ldots$$

$$=\frac{n^3+21\,n^2+110\,n+120}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,2^{n-7}$$

u. s. w.

---

§ 3.

Das Gesetz, nach welchem die Gleichungen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... für diesen speciellen Zweck zu kombinieren sind, ist folgendes. Man muss, wenn die Reihe, welche die figurierten Zahlen h-ter Ord-

nung und die sämtlichen Binomialkoëfficienten n-ter Potenz mit ungeradem Index enthält, gebildet und summiert werden soll, kombinieren

$$\mathfrak{a} + \binom{h}{1}\mathfrak{b} + \binom{h}{2}\mathfrak{c} + \binom{h}{3}\mathfrak{d} + \dots$$

Dasselbe Bildungsgesetz gilt offenbar für die Reihen am Schlusse von § 1, nur treten a, b, c, ... an die Stelle von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \dots$.

Beweis. Die Glieder der zu bildenden Reihe haben die allgemeine Form

$$\binom{h+k}{h}\binom{n}{2k+1}$$

$\binom{n}{2k+1}$ hat in den Reihen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \dots$ den Faktor resp. $\binom{k}{0}, \binom{k}{1}, \binom{k}{2}, \binom{k}{3}, \dots$ Wenn demnach diese Reihen, wie angegeben, kombiniert werden, so erhält $\binom{n}{2k+1}$ in der Summe den Faktor

$$\binom{h}{0}\binom{k}{0} + \binom{h}{1}\binom{k}{1} + \binom{h}{2}\binom{k}{2} + \dots + \binom{h}{h}\binom{k}{h}$$

oder da

$$\binom{h}{m} = \binom{h}{h-m},$$

$$\binom{h}{h}\binom{k}{0} + \binom{h}{h-1}\binom{k}{1} + \binom{h}{h-2}\binom{k}{2} + \dots + \binom{h}{0}\binom{k}{h}.$$

Dieses ist aber in der That nichts anderes als $\binom{h+k}{h}$ nach dem allgemeinen Satze

$$\binom{m+n}{r} = \binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \binom{m}{2}\binom{n}{r-2} + \dots + \binom{m}{r}\binom{n}{0}.$$

Denn man erhält einerseits nach dem binomischen Lehrsatze

$$(1+z)^{m+n} = \binom{m+n}{0} + \binom{m+n}{1}z + \binom{m+n}{2}z^2 + \dots + \binom{m+n}{r}z^r + \dots$$

Andererseits erhält man $(1 + z)^{m+n}$, wenn man die beiden Identitäten

$$(1+z)^m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1}z + \binom{m}{2}z^2 + \dots + \binom{m}{r}z^r + \dots$$

$$(1+z)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}z + \binom{n}{2}z^2 + \dots + \binom{n}{r}z^r + \dots$$

miteinander multipliziert. Setzt man in den beiden Entwick-

lungen von $(1 + z)^{m+n}$ die Koëfficienten von z^r einander gleich, so ergiebt sich unmittelbar der zum Beweise gebrauchte Satz. Es wird nur vorausgesetzt, dass r eine positive ganze Zahl ist.[3])

Bemerkenswert sind die beiden speciellen Fälle, welche sich für $m = n = r$ und $m = n$, $r = n - 1$ ergeben:

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 \qquad 4)$$

$$\binom{2n}{n-1} = \binom{n}{0}\binom{n}{1} + \binom{n}{1}\binom{n}{2} + \binom{n}{2}\binom{n}{3} + \dots$$

---

§ 4.

Bisher wurden Reihen summiert, welche nur die Binomialkoëfficienten mit geradem, resp. ungeradem Index enthielten. Es liegt nahe, durch Kombination der Gleichungen a, b, c, d, ... mit den Gleichungen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, ... Reihen aufzustellen und zu summieren, welche die Binomialkoëfficienten n-ter Potenz sowohl mit geradem, als ungeradem Index enthalten. Man findet aus

$$a + \mathfrak{a}: \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots \binom{n}{n} = 2^n$$

oder

$$\sum_{h=0}^{h=n} \binom{h}{0}\binom{n}{h} = \binom{n}{0} \cdot 2^n,$$

eine Identität, welche man bekanntlich direkt erhält, wenn man $(1 + 1)^n$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt.

Ferner gewinnt man durch die Kombinationen

$$\mathfrak{a} + 2b + 2\mathfrak{b}: \quad \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + 4\binom{n}{4} + \dots = n \cdot 2^{n-1}$$

oder

$$\sum_{h=0}^{h=n} \binom{h}{1}\binom{n}{h} = \binom{n}{1} \cdot 2^{n-1}$$

$$b + 3\mathfrak{b} + 4c + 4\mathfrak{c}: \quad \binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + 6\binom{n}{4} + 10\binom{n}{5} + \dots = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 2^{n-2}$$

oder

$$\sum_{h=0}^{h=n} \binom{h}{2}\binom{n}{h} = \binom{n}{2} \cdot 2^{n-2}$$

$$\mathfrak{b} + 4c + 8\mathfrak{c} + 8d + 8\mathfrak{d} : \binom{n}{3} + 4\binom{n}{4} + 10\binom{n}{5} + \ldots = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cdot 2^{n-3}$$

oder $$\sum_{h=0}^{h=n} \binom{h}{3}\binom{n}{h} = \binom{n}{3} \cdot 2^{n-3}.$$

---

§ 5.

Ganz allgemein gilt der Satz

$$\sum_{h=0}^{h=n} \binom{h}{m}\binom{n}{h} = \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m}.$$

Beweis. Es ist

$$\binom{m+k}{m}\binom{n}{m+k} = \frac{m+k}{1} \cdot \frac{m+k-1}{2} \cdots \frac{k+1}{m} \times \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdots \frac{n-m-k+1}{m+k}$$

$$= \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdots \frac{n-m+1}{m} \times \frac{n-m}{1} \cdot \frac{n-m-1}{2} \cdots \frac{n-m-k+1}{k}$$

$$= \binom{n}{m}\binom{n-m}{k}.$$

Setzt man nun rechter Hand für k der Reihe nach 0, 1, 2, 3, . . . , n—m und links h an die Stelle von m + k, so ist für h zu setzen m, m + 1, . . . n.

Folglich $$\sum_{h=m}^{h=n} \binom{h}{m}\binom{n}{h} = \binom{n}{m} \sum_{k=0}^{k=n-m} \binom{n-m}{k}.$$

Da aber $\binom{h}{m} = 0$ für $h < m$ ist, so kann man für h der Reihe nach setzen 0, 1, 2, 3, . . . , n. Da ferner nach § 4

$$\sum_{k=0}^{k=n-m} \binom{n-m}{k} = 2^{n-m}$$

ist, so folgt $$\sum_{h=0}^{h=n} \binom{h}{m}\binom{n}{h} = \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m}.$$

Der Satz ist nicht nur für $n > m$, sondern ganz allgemein für jedes positive ganzzahlige n richtig. $n = m$ giebt identisch $1 = 1$, $n > m$ liefert identisch $0 = 0$.

§ 6.

Man kann nun ähnlich verfahren, wie bei den arithmetischen Reihen höherer Ordnung. So kann man z. B. die Binomialkoëfficienten n-ter Potenz der Reihe nach mit den Quadraten, Kuben u. s. w. der natürlichen Zahlen multiplizieren und die Produkte addieren.

Es ist
$$h^2 = 2\binom{h}{2} + \binom{h}{1},$$

folglich
$$\sum_{h=0}^{h=n} h^2 \binom{n}{h} = 2\sum_{h=0}^{h=n} \binom{h}{2}\binom{n}{h} + \sum_{h=0}^{h=n} \binom{h}{1}\binom{n}{h} = n\,(n+1)\,.\,2^{n-2}\,.$$

Ferner ist
$$h^3 = 6\binom{h}{3} + 6\binom{h}{2} + \binom{h}{1},$$

folglich
$$\sum_{h=0}^{h=n} h^3 \binom{n}{h} = 6\sum_{h=0}^{h=n} \binom{h}{3}\binom{n}{h} + 6\sum_{h=0}^{h=n} \binom{h}{2}\binom{n}{h} + \sum_{h=0}^{h=n} \binom{h}{1}\binom{n}{h}$$
$$= n^2\,(n+3)\,.\,2^{n-3}\,.$$

In derselben Weise findet man

$$\sum_{h=0}^{h=n} h^4 \binom{n}{h} = n\,(n+1)\,(n^2 + 5\,n - 2)\,.\,2^{n-4}$$

$$\sum_{h=0}^{h=n} h^5 \binom{n}{h} = n^2\,(n^3 + 10\,n^2 + 15\,n - 10)\,.\,2^{n-5}$$

$$\sum_{h=0}^{h=n} h^6 \binom{n}{h} = n\,(n^5 + 15\,n^4 + 45\,n^3 - 15\,n^2 - 30\,n + 16)\,.\,2^{n-6}$$

$$\sum_{h=0}^{h=n} h^7 \binom{n}{h} = n^2\,(n^5 + 21\,n^4 + 105\,n^3 + 35\,n^2 - 210\,n + 112)\,.\,2^{n-7}$$

Da sich stets h^m als Reihe nach $\binom{h}{m}, \binom{h}{m-1}, \ldots, \binom{h}{1}$ darstellen lässt[5]), kann die Rechnung mit Hilfe des Satzes in § 5 beliebig weit fortgesetzt werden.[6])

§ 7.

Man kann auch mit einer beliebigen Potenz aus der natürlichen Zahlenreihe beginnen. Denn es ist

$$\sum_{h=0}^{h=n}(p+h)^m\binom{n}{h}=p^m\sum_{h=0}^{h=n}\binom{n}{h}+\binom{m}{1}p^{m-1}\sum_{h=0}^{h=n}h\binom{n}{h}+\binom{m}{2}p^{m-2}\sum_{h=0}^{h=n}h^2\binom{n}{h}+\cdots$$

wo die Summen auf der rechten Seite nach § 6 auszuführen sind.

Man erhält auf diese Weise

$$\sum_{h=0}^{h=n}(p+h)\binom{n}{h}=(n+2p)\,.\,2^{n-1}$$

$$\sum_{h=0}^{h=n}(p+h)^2\binom{n}{h}=\Big[(n+2p)^2+n\Big]\,.\,2^{n-2}$$

$$\sum_{h=0}^{h=n}(p+h)^3\binom{n}{h}=\Big[(n+2p)^3+3\,n\,(n+2p)\Big]\,.\,2^{n-3}$$

$$\sum_{h=0}^{h=n}(p+h)^4\binom{n}{h}=\Big[(n+2p)^4+6\,n\,(n+2p)^2+n\,(3\,n-2)\Big]\,.\,2^{n-4}$$

$$\sum_{h=0}^{h=n}(p+h)^5\binom{n}{h}=\Big[(n+2p)^5+10\,n\,(n+2p)^3+5\,n\,(3n-2)\,(n+2p)\Big]\,.\,2^{n-5}$$

$$\sum_{h=0}^{h=n}(p+h)^6\binom{n}{h}=$$

$$\Big[(n+2p)^6+15\,n\,(n+2p)^4+15\,n\,(3\,n-2)\,(n+2p)^2+n\,(15\,n^2-30\,n+16)\Big].2^{n-6}.$$

Sowohl diese Formeln als die in § 6 gelten ebenso allgemein für jedes n, wie der Satz in § 5, mit dessen Hilfe sie abgeleitet sind.

Beispiele.

$$n=8,\ p=1,\ m=3:\quad \sum_{h=0}^{h=8}(1+h)^3\binom{8}{h}=1240\,.\,2^5$$

$$1+8\,.\,8+27\,.\,28+64\,.\,56+125\,.\,70+216\,.\,56+343\,.\,28+512\,.\,8+$$
$$+\,729=39680\,.$$

$$n = 11,\ p = 3,\ m = 2:\ \sum_{h=0}^{h=11} (3 + h)^2 \binom{11}{h} = 300 \,.\, 2^9$$

$$9 + 16 \,.\, 11 + 25 \,.\, 55 + 36 \,.\, 165 + 49 \,.\, 330 + 64 \,.\, 462 + 81 \,.\, 462 + 100 \,.\, 330 + \\ + 121 \,.\, 165 + 144 \,.\, 55 + 169 \,.\, 11 + 196 = 153600.$$

Es liegt nahe, zu untersuchen, ob die Entwicklung

$$\sum_{h=0}^{h=n} (p + h)^m \binom{n}{h} = \left[z^m + \binom{m}{2} c_1 z^{m-2} + \binom{m}{4} c_2 z^{m-4} + \ldots \right] . 2^{n-m},$$

wo der Kürze wegen $n + 2p = z$ gesetzt ist, allgemein gilt. Die Reihe in der Klammer bricht für $m = 2u$ mit c_u, für $m = 2u + 1$ mit $\binom{m}{1} c_u z$ ab. Die Grössen c sind unabhängig von m und p, allein abhängig von n, und zwar ist c_h eine ganze rationale Funktion h-ten Grades von n.

In der That lässt sich die Richtigkeit dieser durch Induktion gefundenen allgemeinen Form in einfacher Weise zeigen.

Es ist
$$2\,(p + h) = z + 2h - n$$

$$2^m (p + h)^m = z^m + \binom{m}{1} z^{m-1} (2\,h - n) + \binom{m}{2} z^{m-2} (2\,h - n)^2 + \\ + \binom{m}{3} z^{m-3} (2\,h - n)^3 + \ldots$$

$$2^m \sum_{h=0}^{h=n} (p + h)^m \binom{n}{h} = z^m \sum_{h=0}^{h=n} \binom{n}{h} + \binom{m}{1} z^{m-1} \sum_{h=0}^{h=n} (2\,h - n) \binom{n}{h} + \\ + \binom{m}{2} z^{m-2} \sum_{h=0}^{h=n} (2\,h - n)^2 \binom{n}{h} + \ldots$$

Rechter Hand sind alle Summen von der Form

$$\sum_{h=0}^{h=n} (2\,h - n)^{2k+1} \binom{n}{h} = 0,$$

da die von den Enden gleich weit entfernten Glieder sich gegenseitig tilgen. Folglich ist die angenommene Form der Darstellung richtig. Es wird

$$2^n .\ c_k = \sum_{h=0}^{h=n} (2\,h - n)^{2k} \binom{n}{h}.$$

Die successive Berechnung der Summen wird dadurch ungemein vereinfacht. Für $m = 2u$ ist nur c_u zu berechnen, die Summen für die ungeraden m werden ohne jede Rechnung gewonnen. So ist z. B. sofort hinzuschreiben

$$\sum_{h=0}^{h=n} (p+h)^7 \binom{n}{h} = \Big[(n+2p)^7 + 21n\,(n+2p)^5 + 35n\,(3n-2)\,(n+2p)^3 + \\ + 7\,n\,(15\,n^2 - 30\,n + 16)\,(n+2\,p) \Big]\, 2^{n-7}.$$

---

§ 8.

Endlich kann man die Binomialkoëfficienten n-ter Potenz der Reihe nach mit den Gliedern irgend einer arithmetischen Reihe höherer Ordnung multiplizieren und die Produkte addieren.

Wenn das allgemeine Glied der arithmetischen Reihe m-ter Ordnung

$$t_h = \alpha_0\, h^m + \alpha_1\, h^{m-1} + \alpha_2\, h^{m-2} + \ldots + \alpha_{m-1}\, h + \alpha_m$$

ist, so ist doch offenbar

$$\sum_{h=0}^{h=n} t_h \binom{n}{h} = \alpha_0 \sum_{h=0}^{h=n} h^m \binom{n}{h} + \alpha_1 \sum_{h=0}^{h=n} h^{m-1} \binom{n}{h} + \ldots + \alpha_m \sum_{h=0}^{n=n} \binom{n}{h},$$

wo die Summen auf der rechten Seite nach § 6 zu berechnen sind.

Beispiel.

$$\sum_{h=0}^{h=n} (h^2 + 5\,h-3) \binom{n}{h} = \sum_{h=0}^{h=n} h^2 \binom{n}{h} + 5 \sum_{h=0}^{h=n} h \binom{n}{h} - 3 \sum_{h=0}^{h=n} \binom{n}{h}$$

$$= n\,(n+1)\,.\,2^{n-2} + 5\,n\,.\,2^{n-1} - 3\,.\,2^n$$

$$= (n^2 + 11\,n-12)\,.\,2^{n-2} = (n-1)\,(n+12)\,.\,2^{n-2}.$$

Man kann auch in folgender Weise zum Ziele kommen. Eine einfache Überlegung lehrt, dass

$$\sum_{h=0}^{h=n} (\alpha_0\, h^m + \alpha_1\, h^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-1}\, h + \alpha_m) \binom{n}{h} = F\,.\,2^{n-m}$$

werden muss, wo F eine ganz rationale Funktion m-ten Grades von n ist, welche mit $\alpha_0\, n^m$ beginnt und mit $\alpha_m\, 2^m$ schliesst.

Man hat also noch die m — 1 Koëfficienten der übrigen Potenzen von n zu bestimmen. Setzt man m — 1 verschiedene specielle Werte für n, so erhält man m — 1 lineare Gleichungen zur Berechnung dieser Koëfficienten.

Beispiel.

Es soll
$$\sum_{h=0}^{h=n} (h-1)\,(h-3)\,(h-5)\,\binom{n}{h}$$
berechnet werden.

Die Summe sei
$$= (n^3 + \alpha_1\, n^2 + \alpha_2\, n - 120)\,.\,2^{n-3}\,,$$
so geben n = 1 und n = 2 für α_1 und α_2 die beiden Gleichungen
$$\alpha_1 + \alpha_2 = 59$$
$$2\alpha_1 + \alpha_2 = 44$$
$$\overline{\alpha_1 = -\,15,\ \alpha_2 = 74}$$
also
$$\sum_{h=0}^{h=n} (h-1)\,(h-3)\,(h-5)\,\binom{n}{h} = (n^3 - 15\, n^2 + 74\, n - 120)\,.\,2^{n-3}$$
$$= (n-4)\,(n-5)\,(n-6)\,.\,2^{n-3}.$$

---

§ 9.

Die in den beiden ersten §§ aufgestellten Gleichungen a, b, c, . . . und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, . . . welche nur die Binomialkoëfficienten mit geradem, resp. ungeradem Index enthalten, sind durchaus nicht für jedes n richtig. Dasselbe gilt von den durch Kombination am Schlusse der beiden §§ abgeleiteten Gleichungen. Nur a und $\mathfrak{a}$ gelten für sämtliche n, b und $\mathfrak{b}$ dagegen nur für $n > 1$, c und $\mathfrak{c}$ nur für $n > 2$, d und $\mathfrak{d}$ nur für $n > 3$ u. s. w.

So verschwindet z. B. für n = 2 die linke Seite von c, während die rechte $= -\frac{1}{8}$ wird. Für n = 1 erhält man links 0, rechts $-\frac{1}{16}$.

Wenn c auch für n = 2 gelten soll, so muss auf der rechten Seite noch ein Glied hinzukommen, welches für $n > 2$ ver-

schwindet, aber für $n = 2$ die Gleichung erfüllt. Es ist dies offenbar $+ \frac{1}{8}\binom{2}{n}$. Soll c auch für $n = 1$ gelten, so muss noch das Glied $- \frac{3}{16}\binom{1}{n}$ auf der rechten Seite hinzukommen.

Auf diesem Wege gewinnt man die folgenden für jedes n geltenden Identitäten, wo $\nu = \frac{n}{2}$ für ein gerades n und $= \frac{n-1}{2}$ für ein ungerades n ist,

$$a_1)\quad \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{n}{2h} = 2^{n-1}$$

$$b_1)\quad \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{h}{1}\binom{n}{2h} = n \cdot 2^{n-3} - \frac{1}{4}\binom{1}{n}$$

$$c_1)\quad \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{h}{2}\binom{n}{2h} = \frac{n}{2}\binom{n-3}{1} \cdot 2^{n-5} + \frac{1}{8}\binom{2}{n} - \frac{3}{16}\binom{1}{n}$$

$$d_1)\quad \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{h}{3}\binom{n}{2h} = \frac{n}{3}\binom{n-4}{2} \cdot 2^{n-7} - \frac{1}{16}\binom{3}{n} + \frac{1}{8}\binom{2}{n} - \frac{3}{32}\binom{1}{n}$$

$$e_1)\quad \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{h}{4}\binom{n}{2h} = \frac{n}{4}\binom{n-5}{3} \cdot 2^{n-9} + \frac{1}{32}\binom{4}{n} - \frac{5}{64}\binom{3}{n} + \frac{11}{128}\binom{2}{n} - \frac{11}{256}\binom{1}{n}.$$

Ferner gelten allgemein für die Binomialkoëfficienten mit ungeradem Index die folgenden Identitäten, wo $\nu = \frac{n}{2} - 1$ für ein gerades n und $= \frac{n-1}{2}$ für ein ungerades n ist,

$$\mathfrak{a}_1)\quad \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{n}{2h+1} = 2^{n-1}$$

$$\mathfrak{b}_1)\quad \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{h}{1}\binom{n}{2h+1} = \binom{n-2}{1} \cdot 2^{n-3} + \frac{1}{4}\binom{1}{n}$$

$$\mathfrak{c}_1)\quad \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{h}{2}\binom{n}{2h+1} = \binom{n-3}{2} \cdot 2^{n-5} - \frac{1}{8}\binom{2}{n} + \frac{1}{16}\binom{1}{n}$$

$$\mathfrak{d}_1)\quad \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{h}{3}\binom{n}{2h+1} = \binom{n-4}{3} \cdot 2^{n-7} + \frac{1}{16}\binom{3}{n} - \frac{1}{16}\binom{2}{n} + \frac{3}{32}\binom{1}{n}$$

$$e_1)\quad \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{h}{4}\binom{n}{2h+1} = \binom{n-5}{4} . 2^{n-9} - \frac{1}{32}\binom{4}{n} + \frac{3}{64}\binom{3}{n} - \frac{9}{128}\binom{2}{n} - \frac{3}{256}\binom{1}{n} .$$

---

§ 10.

Aus diesen Identitäten kann man zunächst diejenigen finden, welche die Binomialkoëfficienten mit geradem, resp. ungeradem Index enthalten, jeden multipliziert in eine Potenz seines Index.

Man findet für die Binomialkoëfficienten mit geradem Index

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h)\binom{n}{2h} = n \,.\, 2^{n-2} - \frac{1}{2}\binom{1}{n}$$

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h)^2\binom{n}{2h} = n\,(n+1) \,.\, 2^{n-3} + \binom{2}{n} - \frac{5}{2}\binom{1}{n}$$

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h)^3\binom{n}{2h} = n^2\,(n+3) \,.\, 2^{n-4} - 3\binom{3}{n} + 12\binom{2}{n} - \frac{31}{2}\binom{1}{n}$$

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h)^4\binom{n}{2h} = n\,(n+1)\,(n^2+5\,n-2) \,.\, 2^{n-5} + 12\binom{4}{n} - 66\binom{3}{n} +$$

$$+ 133\binom{2}{n} - \frac{233}{2}\binom{1}{n} .$$

Die Ableitung dieser Identitäten ist dieselbe wie in § 6. So findet man z. B.

$$(2h)^3 = 48\binom{h}{3} + 48\binom{h}{2} + 8\binom{h}{1}$$

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h)^3\binom{n}{2h} = 48\sum_{h=0}^{h=\nu}\binom{h}{3}\binom{n}{2h} + 48\sum_{h=0}^{h=\nu}\binom{h}{2}\binom{n}{2h} + 8\sum_{h=0}^{h=\nu}\binom{h}{1}\binom{n}{2h}$$

und dann nach § 9 die obige Gleichung.

Für die Binomialkoëfficienten mit ungeradem Index erhält man

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h+1)\binom{n}{2h+1} = n \,.\, 2^{n-2} + \frac{1}{2}\binom{1}{n}$$

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h+1)^2 \binom{n}{2h+1} = n\,(n+1)\,.\,2^{n-3} - \binom{2}{n} + \frac{5}{2}\binom{1}{n}$$

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h+1)^3 \binom{n}{2h+1} = n^2\,(n+3)\,.\,2^{n-4} + 3\binom{3}{n} - 12\binom{2}{n} + \frac{31}{2}\binom{1}{n}$$

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h+1)^4 \binom{n}{2h+1} = n\,(n+1)\,(n^2+5n-2)\,.\,2^{n-5} - 12\binom{4}{n} +$$

$$+ 66\binom{3}{n} - 133\binom{2}{n} + \frac{233}{2}\binom{1}{n}\,.$$

ν hat hier, wie auch überall im folgenden, dieselbe Bedeutung wie in § 9. Die Formeln gelten allgemein für jedes positive ganzzahlige n. Es entsprechen diese beiden Formelgruppen den in § 6 für die sämtlichen Binomialkoëfficienten aufgestellten Gleichungen.

Man kann auch hier mit einer beliebigen Potenz aus der natürlichen Zahlenreihe beginnen. Man findet z. B.

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h+1)^3 \binom{n}{2h} = \left[(n+2)^3 + 3n\,(n+2)\right].\,2^{n-4} - 3\binom{3}{n} + 15\binom{2}{n} - \frac{49}{2}\binom{1}{n}$$

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h+2)^3 \binom{n}{2h+1} =$$

$$\left[(n+2)^3 + 3\,n\,(n+2)\right].\,2^{n-4} + 3\binom{3}{n} - 15\binom{2}{n} + \frac{49}{2}\binom{1}{n}.$$

---

§ 11.

Wenn $n > m$ ist, so ist stets

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{2h}{m}\binom{n}{2h} = \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{2h+1}{m}\binom{n}{2h+1} = \binom{n}{m}\,.\,2^{n-m-1}\,.$$

Beweis. Allgemein ist für jedes m, n und h

$$\binom{2h}{m}\binom{n}{2h} = \frac{2h}{1}\,.\,\frac{2h-1}{2}\cdots\frac{2h-m+1}{m} \times \frac{n}{1}\,.\,\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-2h+1}{2h}$$

$$= \frac{n}{1}\,.\,\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-m+1}{m} \times \frac{n-m}{1}\,.\,\frac{n-m-1}{2}\cdots\frac{n-2h+1}{2h-m}$$

$$= \binom{n}{m}\binom{n-m}{2h-m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{n-2h}\,,$$

also
$$\sum_{h=0}^{h=\nu}\binom{2h}{m}\binom{n}{2h}=\binom{n}{m}\sum_{h=0}^{h=\nu}\binom{n-m}{n-2h}.$$

Die Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung ist, je nachdem n gerade oder ungerade ist, mit Hilfe von a_1 oder $\mathfrak{a}_1$ in § 9 zu bestimmen. In beiden Fällen erhält man aber, wenn $n-m$ eine positive ganze Zahl ist, d. h. $n > m$ ist, denselben Wert, nämlich 2^{n-m-1}. Daher

$$\sum_{h=0}^{h=\nu}\binom{2h}{m}\binom{n}{2h}=\binom{n}{m}\cdot 2^{n-m-1} \text{ für } n > m.$$

Ganz ebenso wird bewiesen, dass

$$\sum_{h=0}^{h=\nu}\binom{2h+1}{m}\binom{n}{2h+1}=\binom{n}{m}\cdot 2^{n-m-1},$$

aber ebenfalls nur unter der Voraussetzung, dass $n-m$ eine positive ganze Zahl ist, d. h. $n > m$.

---

§ 12.

Wenn man je zwei entsprechende Gleichungen der beiden Gruppen in § 10 addiert, so erhält man genau die Identitäten in § 6. Die Aggregate der Glieder in $\binom{1}{n}, \binom{2}{n}, \binom{3}{n}, \ldots$ heben sich in der Summe gegenseitig weg. Die schon bekannte Thatsache, dass die Identitäten in § 6 allgemein für jedes n gelten, wird dadurch nur bestätigt.

Subtrahiert man dagegen je zwei entsprechende Gleichungen in § 10, so erhält man, wenn man noch $a_1 - \mathfrak{a}_1$ hinzunimmt,

$$\sum_{h=0}^{h=\nu}\binom{n}{2h}-\sum_{h=0}^{h=\nu}\binom{n}{2h+1}=\sum_{h=0}^{h=n}(-1)^h\binom{n}{h}=0,$$

was bekanntlich auch direkt durch Entwicklung von $(1-1)^n$ folgt,

$$\sum_{h=0}^{h=\nu}(2h)\binom{n}{2h}-\sum_{h=0}^{h=\nu}(2h+1)\binom{n}{2h+1}=-\binom{1}{n}$$

oder
$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h\, h \binom{n}{h} = 0 \quad \text{für } n > 1,$$

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h)^2 \binom{n}{2h} - \sum_{h=0}^{h=\nu} (2h+1)^2 \binom{n}{2h+1} = 2\binom{2}{n} - 5\binom{1}{n}$$

oder
$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h\, h^2 \binom{n}{h} = 0 \quad \text{für } n > 2,$$

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h)^3 \binom{n}{2h} - \sum_{h=0}^{h=\nu} (2h+1)^3 \binom{n}{2h+1} = -6\binom{3}{n} + 24\binom{2}{n} - 31\binom{1}{n}$$

oder
$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h\, h^3 \binom{n}{h} = 0 \quad \text{für } n > 3,$$

endlich

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} (2h)^4 \binom{n}{2h} - \sum_{h=0}^{h=\nu} (2h+1)^4 \binom{n}{2h+1} = 24\binom{4}{n} - 132\binom{3}{n} + $$
$$+ 226\binom{2}{n} - 233.\binom{1}{n}$$

oder
$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h\, h^4 \binom{n}{h} = 0 \quad \text{für } n > 4.$$

---

§ 13.

Addiert man die beiden Summen in § 11, welche für $n > m$ gleichen Wert haben, so erhält man

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{2h}{m}\binom{n}{2h} + \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{2h+1}{m}\binom{n}{2h+1} = \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m}$$

oder
$$\sum_{h=0}^{h=n} \binom{h}{m}\binom{n}{h} = \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m}.$$

Nach § 5 gilt diese Gleichung allgemein für jedes n. Dieses ist nur möglich, wenn für jedes n

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{2h}{m}\binom{n}{2h} = \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m-1} + R$$

$$\sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{2h+1}{m}\binom{n}{2h+1} = \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m-1} - R$$

ist. R ist ein Aggregat von Gliedern in $\binom{1}{n}, \binom{2}{n}, \binom{3}{n}, \ldots, \binom{m}{n}$, verschwindet also für $n > m$.

$$\text{Daher} \quad \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{2h}{m}\binom{n}{2h} - \sum_{h=0}^{h=\nu} \binom{2h+1}{m}\binom{n}{2h+1} = 2\,R$$

oder

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{m}\binom{n}{h} = 0 \quad \text{für } n > m.$$

---

§ 14.

Der zuletzt gefundene Satz kann verallgemeinert:

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{p+h}{m}\binom{n}{h} = 0 \quad \text{für } n > m$$

und so ausgesprochen werden:

Wenn man die Binomialkoëfficienten n-ter Potenz unter ebenso viele aufeinander folgende figurierte Zahlen m-ter Ordnung schreibt und paarweise multipliziert, so ist die Summe dieser Produkte mit abwechselnden Vorzeichen gleich Null, wenn $n > m$ ist.

Beweis. Nach dem zum Beweise von § 3 gebrauchten Satze ist

$$\binom{p+h}{m} = \binom{h}{m} + \binom{p}{1}\binom{h}{m-1} + \binom{p}{2}\binom{h}{m-2} + \cdots + \binom{p}{m}$$

folglich

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{p+h}{m}\binom{n}{h} = \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{m}\binom{n}{h} + \binom{p}{1}\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{m-1}\binom{n}{h} + \cdots$$

$$+ \binom{p}{m}\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{n}{h} = 0,$$

da die Summen auf der rechten Seite nach § 13 für $n > m$ sämtlich verschwinden.[7])

Beispiel. $n = 4,\ m = 2,\ p = 2$:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
\hline
\multicolumn{7}{l}{1 - 12 + 36 - 40 + 15 = 0.}
\end{array}$$

Man kann die Binomialkoëfficienten gegen die figurierten Zahlen beliebig nach rechts verschieben. Es ist das gleichbedeutend mit einem Wachsen von p, wodurch nichts geändert wird:

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 \\
 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
\hline
 & & \multicolumn{6}{l}{6 - 40 + 90 - 84 + 28 = 0.}
\end{array}$$

Dagegen kann man die Binomialkoëfficienten nicht beliebig nach links verschieben. Es dürfen nicht mehr als m Binomialkoëfficienten nach links über die figurierten Zahlen hinausstehen. So giebt

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
\hline
 & & \multicolumn{5}{l}{6 - 12 + 6 = 0}
\end{array}$$

während

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
\hline
 & & & \multicolumn{5}{l}{4 - 3 = 1}
\end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & & \\
\hline
 & & & & \multicolumn{5}{l}{15 - 18 + 6 = 3.}
\end{array}$$

---

§ 15.

Für jedes n gilt der Satz:

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^{n+h} \binom{p+h}{n} \binom{n}{h} = 1$$

d. h.: Schreibt man die Binomialkoëfficienten n-ter Potenz unter ebenso viele aufeinander folgende figurierte Zahlen n-ter Ordnung und multipliziert paarweise, so ist die Summe der Produkte mit abwechselnden Vorzeichen der Einheit gleich. Das Vorzeichen des ersten Summanden ist $(-1)^n$.

Beweis.

$$\sum_{h=0}^{h=n}(-1)^h\binom{p+h}{n}\binom{n}{h}=\sum_{h=0}^{h=n}(-1)^h\binom{h}{n}\binom{n}{h}+\binom{p}{1}\sum_{h=0}^{h=n}(-1)^h\binom{h}{n-1}\binom{n}{h}+$$

$$+\binom{p}{2}\sum_{h=0}^{h=n}(-1)^h\binom{h}{n-2}\binom{n}{h}+\dots$$

Die Summen auf der rechten Seite verschwinden nach § 13 sämtlich bis auf die erste, und von dieser verschwinden alle Glieder bis auf das letzte, welches den Wert $(-1)^n$ hat. Multipliziert man mit $(-1)^n$, so folgt die Behauptung.

Beispiele. $n = 4$, $p = 4$:

1	5	15	35	70	126	210
1	4	6	4	1		

$1 - 20 + 90 - 140 + 70 = 1$

oder mit beliebiger Verschiebung der Binomialkoëfficienten nach rechts

1	5	15	35	70	126	210
		1	4	6	4	1

$15 - 140 + 420 - 504 + 210 = 1$

$n = 3$, $p = 4$:

1	4	10	20	35	56
	1	3	3	1	

$- 4 + 30 - 60 + 35 = 1.$

Über das Verschieben der Binomialkoëfficienten nach links ist dasselbe wie in § 14 zu bemerken. Doch müssen die ausfallenden Summanden durch ± 0 ergänzt werden, z. B.

			1	7	28	84	210
1	6	15	20	15	6	1	

$+ 0 - 0 + 0 - 20 + 105 - 168 + 84 = 1.$

---

§ 16.

Ferner gilt der Satz:

$$\sum_{h=0}^{h=n}(-1)^{n+h}\binom{p+h}{n+k}\binom{n}{h}=\binom{p}{k}$$

d. h.: Wenn man die Binomialkoëfficienten n-ter Potenz unter ebenso viele aufeinander folgende figurierte Zahlen $(n+k)$-ter

Ordnung, mit der m-ten figurierten Zahl beginnend, schreibt und paarweise multipliziert, so ist die Summe der Produkte mit abwechselnden Vorzeichen gleich der $(m+n)$-ten figurierten Zahl k-ter Ordnung. Das Vorzeichen des ersten Summanden ist $(-1)^n$.[8])

Beweis.

$$\binom{p+h}{n+k} = \binom{h}{n+k} + \binom{p}{1}\binom{h}{n+k-1} + \cdots + \binom{p}{k}\binom{h}{n} + \binom{p}{k+1}\binom{h}{n-1} + \cdots + \binom{p}{n-k},$$

folglich

$$\sum_{h=0}^{h=n}(-1)^h\binom{p+h}{n+k}\binom{n}{h} = \sum_{h=0}^{h=n}(-1)^h\binom{h}{n+k}\binom{n}{h} + \binom{p}{1}\sum_{h=0}^{h=n}(-1)^h\binom{h}{n+k-1}\binom{n}{h} + \cdots$$

$$\cdots + \binom{p}{k}\sum_{h=0}^{h=n}(-1)^h\binom{h}{n}\binom{n}{h} + \binom{p}{k+1}\sum_{h=0}^{h=n}(-1)^h\binom{h}{n-1}\binom{n}{h} + \cdots + \binom{p}{n+k}\sum_{h=0}^{h=n}(-1)^h\binom{n}{h}.$$

Die k ersten Summen auf der rechten Seite verschwinden, da in ihnen jedes Glied für sich verschwindet. Ferner verschwinden die n letzten Summen nach § 13. Folglich bleibt nur

$$\binom{p}{k}\sum_{h=0}^{h=n}(-1)^h\binom{h}{n}\binom{n}{h} \text{ übrig.}$$

Nach § 15 ist der Wert dieses Ausdrucks $(-1)^n\binom{p}{k}$. Multipliziert man mit $(-1)^n$, so folgt die Behauptung.

Beispiele. $n = 4$, $k = 1$, $m = 1$:

1	6	21	56	126	252
1	4	6	4	1	

$1 - 24 + 126 - 224 + 126 = 5$

$n = 3$, $k = 2$, $m = 2$:

1	6	21	56	126	252
	1	3	3	1	

$- 6 + 63 - 168 + 126 = 15.$

Über die Verschiebung der Binomialkoëfficienten nach links ist dieselbe Bemerkung wie in § 15 zu machen.

§ 14 lehrt, dass der Satz auch für $k = 0$ gilt, und § 15, dass er auch für negative k richtig ist. Denn es ist $\binom{p}{0} = 1$ und $\binom{p}{-k} = 0$. Die beiden genannten §§ erscheinen also als specielle Fälle dieses allgemeinen Satzes.

§ 17.

Wenn $n > m$ ist, so ist

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \, h^m \binom{n}{h} = 0.$$

Beweis. Stets lässt sich die Entwicklung ausführen

$$h^m = m! \binom{h}{m} + \alpha_1 \binom{h}{m-1} + \alpha_2 \binom{h}{m-2} + \dots$$

folglich

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \, h^m \binom{n}{h} = m! \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{m} \binom{n}{h} + \alpha_1 \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{m-1} \binom{n}{h} +$$
$$+ \alpha_2 \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{m-2} \binom{n}{h} + \dots = 0,$$

da für $n > m$ die Summen auf der rechten Seite nach § 13 sämtlich verschwinden.

In § 12 wurde der Satz bereits für den Fall bewiesen, dass n die Werte 1, 2, 3, 4 hat.

§ 18.

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^{n+h} (p+h)^n \binom{n}{h} = n!$$

d. h.: Schreibt man die Binomialkoëfficienten n-ter Potenz unter ebenso viele aufeinander folgende Glieder der n-ten Potenzreihe der natürlichen Zahlen und multipliziert paarweise, so ist die Summe der Produkte mit abwechselnden Vorzeichen gleich dem Produkte der n ersten natürlichen Zahlen. Das Vorzeichen des ersten Summanden ist $(-1)^n$.

Beweis. $(h+p)^n = h^n + \binom{n}{1} h^{n-1} \, p + \binom{n}{2} h^{n-2} \, p^2 + \dots$

folglich

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h (h+p)^n \binom{n}{h} = \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \, h^n \binom{n}{h} + \binom{n}{1} p \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^n \, h^{n-1} \binom{n}{h} +$$
$$+ \binom{n}{2} p^2 \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \, h^{n-2} \binom{n}{h} + \dots$$

Auf der rechten Seite verschwinden nach § 17 alle Summen bis auf die erste. Es sei nun

$$h^n = n! \binom{h}{n} + \alpha_1 \binom{h}{n-1} + \alpha_2 \binom{h}{n-2} + \cdots$$

so ist

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h h^n \binom{n}{h} = n! \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{n}\binom{n}{h} + \alpha_1 \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{n-1}\binom{n}{h} +$$

$$+ \alpha_2 \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \binom{h}{n-2}\binom{n}{h} + \cdots$$

Die erste Summe auf der rechten Seite hat nach § 15 den Wert $(-1)^n$, die übrigen Summen verschwinden nach § 13. Wenn man daher mit $(-1)^n$ multipliziert, so erhält man

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^{n+h} (h+p)^n \binom{n}{h} = n!$$

Zusatz. Ganz ebenso wird der allgemeinere Satz bewiesen:

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^{n+h} (p+hq)^n \binom{n}{h} = n!\, q^n$$

d. h.: Schreibt man die Binomialkoëfficienten n-ter Potenz unter die n-ten Potenzen der Glieder irgend einer arithmetischen Reihe erster Ordnung und multipliziert paarweise, so ist die Summe der Produkte mit abwechselnden Vorzeichen gleich dem Produkte der n ersten natürlichen Zahlen, multipliziert mit der n-ten Potenz der Differenz der arithmetischen Reihe. Das Vorzeichen des ersten Summanden ist wieder $(-1)^n$.

Beispiele. $n = 3,\ p = 1,\ q = 3$:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 64 & 343 & 1000 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ \hline -1 & +192 & -1029 & +1000 = 162 \end{array}$$

$n = 4,\ p = 1,\ q = 1$:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 16 & 81 & 256 & 625 & 1296 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ \hline 1 & -64 & +486 & -1024 & +625 = 24. & \end{array}$$

Da das Resultat von p unabhängig ist, kann man die Binomialkoëfficienten beliebig nach rechts oder links verschieben, nur muss die Reihe in demselben Sinne fortgesetzt werden:

1	16	81	256	625	1296	2401	
		1	4	6	4	1	
		81	— 1024	+ 3750	— 5184	+ 2401	= 24

1	0	1	16	81	256	625
1	4	6	4	1		
1	— 0	+ 6	— 64	+ 81	= 24	

$n = 6,\ p = 7843,\ q = 1$:

$$7843^6 - 6.\ 7844^6 + 15.\ 7845^6 - 20.\ 7846^6 + 15.\ 7847^6 - \\ - 6.\ 7848^6 + 7849^6 = 720.$$

---

§ 19.

Der Satz in § 17 lässt sich dahin verallgemeinern:

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \, (p+h)^m \binom{n}{h} = 0, \quad \text{wenn } n > m \text{ ist,}$$

und so aussprechen:

Wenn man die Binomialkoëfficienten n-ter Potenz unter ebenso viele Glieder der m-ten Potenzreihe der natürlichen Zahlen schreibt und paarweise multipliziert, so ist die Summe der Produkte mit abwechselnden Vorzeichen gleich Null, wenn $n > m$ ist.

Beweis.

$$(h+p)^m = h^m + \binom{m}{1} h^{m-1} p + \binom{m}{2} h^{m-2} p^2 + \ldots$$

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \, (h+p)^m \binom{n}{h} = \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \, h^m \binom{n}{h} + \binom{m}{1} p \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \, h^{m-1} \binom{n}{h} + \\ + \binom{m}{2} p^2 \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \, h^{m-2} \binom{n}{h} + \ldots = 0,$$

da die Summen auf der rechten Seite nach § 17 für $n > m$ sämtlich verschwinden.

Zusatz. In derselben Weise beweist man den allgemeineren Satz:

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h (p + hq)^m \binom{n}{h} = 0 \quad \text{für } n > m$$

d. h.: Der obige Satz gilt auch, wenn an die Stelle der natürlichen Zahlen die Glieder irgend einer arithmetischen Reihe erster Ordnung treten.[9])

Beispiele. $n = 5,\ m = 2,\ p = q = 1$:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ \hline 1 - & 20 + & 90 - & 160 + & 125 - & 36 = 0 \end{array}$$

oder mit einer beliebigen Verschiebung der Binomialkoëfficienten nach rechts oder links:

$$\begin{array}{cccccc} 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ \hline 16 - & 125 + & 360 - & 490 + & 320 - & 81 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ \hline 4 - & 5 + & 0 - & 10 + & 20 - & 9 = 0 \end{array}$$

$n = 6,\ m = 5,\ p = 3125,\ q = 67$:

$$3125^5 - 6.\ 3192^5 + 15.\ 3259^5 - 20.\ 3326^5 + 15.\ 3393^5 -$$
$$- 6.\ 3460^5 + 3527^5 = 0.$$

---

§ 20.

Endlich gilt der Satz:

Wenn man die Binomialkoëfficienten n-ter Potenz unter ebenso viele aufeinander folgende Glieder irgend einer arithmetischen Reihe m-ter Ordnung schreibt und paarweise multi-

pliziert, so ist die Summe dieser Produkte mit abwechselnden Vorzeichen gleich Null, wenn $n > m$ ist.

Beweis. Das allgemeine Glied der arithmetischen Reihe m-ter Ordnung sei

$$t_h = \alpha_0 h^m + \alpha_1 h^{m-1} + \alpha_2 h^{m-2} + \alpha_3 h^{m-3} + \ldots + \alpha_{m-1} h + \alpha_m,$$

so ist

$$\sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \, t_h \binom{n}{h} = \alpha_0 \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \, h^m \binom{n}{h} + \alpha_1 \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \, h^{m-1} \binom{n}{h} +$$
$$+ \alpha_2 \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \, h^{m-2} \binom{n}{h} + \ldots = 0,$$

da die Summen auf der rechten Seite nach § 17 für $n > m$ alle verschwinden.[10])

Beispiel. $n = 4$, $m = 2$, $t_h = (h + 1)(2h + 1)$

1	6	15	28	45	66	91	...
1	4	6	4	1			

$1 - 24 + 90 - 112 + 45 = 0$

oder mit einer beliebigen Verschiebung der Binomialkoëfficienten nach rechts:

1	6	15	28	45	66	91	...
		1	4	6	4	1	

$15 - 112 + 270 - 264 + 91 = 0.$

Der Satz gilt auch für eine beliebige Verschiebung der Binomialkoëfficienten nach links, nur ist die arithmetische Reihe dann in derselben Richtung fortzusetzen:

...	10	3	0	1	6	15	28	..
	1	4	6	4	1			

$10 - 12 + 0 - 4 + 6 = 0.$

Wenn man für die figurierten Zahlen die Bedingung, dass die erste figurierte Zahl einer jeden Ordnung die Einheit ist, fallen lässt und sie einfach als Glieder einer arithmetischen Reihe betrachtet, welche nach links und rechts beliebig fortgesetzt werden kann, so fallen die Bedenken in den §§ 14, 15, 16 fort. Man erhält in der That

... 6	3	1	0	0	1	3	6	10 ...
		1	4	6	4	1		

$$1 - 0 + 0 - 4 + 3 = 0$$

und

... 6	3	1	0	0	1	3	6	10 ...
	1	6	15	20	15	6	1	

$$3 - 6 + 0 - 0 + 15 - 18 + 6 = 0$$

Die in den §§ 13, 14, 17, 19 aufgestellten Sätze sind nur specielle Fälle des letzten allgemeinen Satzes.

Anmerkungen.

1) Die Ordnung der figurierten Zahlen wird hier, wie überall im folgenden, ebenso festgesetzt, wie Cauchy in seiner algebraischen Analysis und neuerdings Baltzer, Lieber und Lühmann, Mehler u. a. es thun. Die figurierten Zahlen m-ter Ordnung bilden die Reihe

$$\binom{m}{m}, \binom{m+1}{m}, \binom{m+2}{m}, \binom{m+3}{m}, \ldots \binom{m+h}{m}.$$

Nur dann herrscht Übereinstimmung mit den arithmetischen Reihen höherer Ordnung.

Allgemein festzustehen scheint nur die Bedingung, dass die erste figurierte Zahl einer jeden Ordnung die Einheit ist. Im übrigen werden sowohl Ordnung als Begriff der figurierten Zahlen verschieden definiert.

2) Eytelwein, alg. Analysis pag. 59, stellt umgekehrt erst die Reihen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ... auf und beweist dann mittels des Schlusses von h auf h + 1 die Richtigkeit des allgemeinen Satzes, den auch Stern in Crelles Journal X. giebt. Es fehlt die Bemerkung, dass diese Summen nicht für jedes n gelten. Die Reihen a, b, c ... finden sich bei Eytelwein nicht, auch nicht der allgemeine Satz in § 1.

Die Entwicklungen der §§ 1 und 2 sind in derselben Weise gegeben, in welcher die beiden allgemeinen Sätze von mir gefunden wurden. Es ist die einfachste Demonstration, welche ich entdecken konnte.

3) Hindenburg, Archiv der reinen u. angew. Math. 1797 pag. 318, beweist den Satz in derselben Weise wie oben und giebt ihn in den von ihm eingeführten Symbolen:

$$^{m+n}\mathfrak{N} = 1.\ {}^{n}\mathfrak{N} + {}^{m}\mathfrak{A}.\ \overset{-1}{{}^{n}\mathfrak{N}} + {}^{m}\mathfrak{B}.\ \overset{-2}{{}^{n}\mathfrak{N}} + {}^{m}\mathfrak{C}.\ \overset{-3}{{}^{n}\mathfrak{N}} + {}^{m}\mathfrak{D}.\ \overset{-4}{{}^{n}\mathfrak{N}} + \cdots$$

$$\cdots + \overset{-1}{{}^{m}\mathfrak{N}}.\ {}^{n}\mathfrak{A} + {}^{m}\mathfrak{N}.\ 1.$$

Vor Hindenburg haben Euler in den Act. Petrop. 1781: de mirabilibus proprietatibus unciarum binom. etc. und dann Buzengeiger in Hindenburgs Archiv 1797 pag. 163 den Satz für den speciellen Fall $r = n$ bewiesen. Buzengeiger hielt diesen einfachen Fall für so wichtig, dass er nicht weniger als drei Beweise beibringt.

Übrigens gilt der viel allgemeinere Satz

$$\binom{m}{r}\binom{n}{0} + \binom{m-p}{r-1}\binom{n+p}{1} + \binom{m-2p}{r-2}\binom{n+2p}{2} + \binom{m-3p}{r-3}\binom{n+3p}{3} + \ldots$$

$$= \binom{m+n}{r} \cdot \sum_{h=0}^{h=r} \frac{\binom{r}{h}}{\binom{m+n}{h}} \cdot p^h.$$

Der zum Beweise von § 3 gebrauchte Satz ist der specielle Fall $p = 0$. Doch liegen solche Untersuchungen nicht in dem Plane dieser Programmbeilage.

[4]) Lagrange fand durch Zufall diesen merkwürdigen Satz, ohne ihn beweisen zu können. Euler und Buzengeiger lieferten dann an genanntem Orte den Beweis. Hindenburg fügt noch den Wortlaut zweier Sätze hinzu, welche in moderner Bezeichnungsweise lauten:

$$\binom{2m}{2n} = \binom{m}{n}^2 + 2\left[\binom{m}{n-1}\binom{m}{n+1} + \binom{m}{n-2}\binom{m}{n+2} + \binom{m}{n-3}\binom{m}{n+3} + \ldots\right]$$

$$\binom{2m}{2n-1} = 2\left[\binom{m}{n-1}\binom{m}{n} + \binom{m}{n-2}\binom{m}{n+1} + \binom{m}{n-3}\binom{m}{n+2} + \ldots\right]$$

[5]) Die Litteratur über die Darstellung einer Potenz durch Faktorenfolgen ist sehr reichhaltig. Zuerst dürfte sich Stirling, methodus differentialis etc., Lond. 1730, mit diesem Gegenstande beschäftigt haben.

[6]) Die ersten drei Reihen dieses § finden sich, auf anderem Wege bewiesen, auch bei Eytelwein, alg. Analysis pag. 52. Doch ist die Summe der dritten Reihe dort falsch angegeben:

$$1^4\binom{n}{1} + 2^4\binom{n}{2} + 3^4\binom{n}{3} + \ldots = n\,(n^3 + 6n^2 + 1)\,.\,2^{n-4}.$$

Der oben gegebene Ausdruck ist der richtige.

[7]) Vergl. Cauchy, alg. Analysis pag. 379, die älteste Quelle, welche ich für diesen interessanten Satz habe entdecken können. In neuerer Zeit ist der Satz zweimal von Matthiessen veröffentlicht worden, in der Zeitschrift f. Math. u. Phys. 1867 und im Schlüssel zu Heis § 93. Die Verschiebung der Binomialkoëfficienten nach links ist nur mit obiger Einschränkung gestattet. Der Beweis wird überall anders als oben geführt.

[8]) Buzengeiger, Hindenb. Archiv 1797 pag. 169, findet gelegentlich auf ganz anderem Wege den Satz für den speciellen Fall $n + k = p$, d. h. wenn mit der ersten figurierten Zahl begonnen wird. Auch das Vorzeichen wird korrekt angegeben. Buzengeiger hat die Hindenburg'sche Bezeichnungsweise adoptiert und giebt den Satz in der Form

$$1 - {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ \beta + 1\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\ \beta + 2\mathfrak{B} \ldots \pm 1.\ \alpha + \beta\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}} = \pm\,\beta\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}.$$

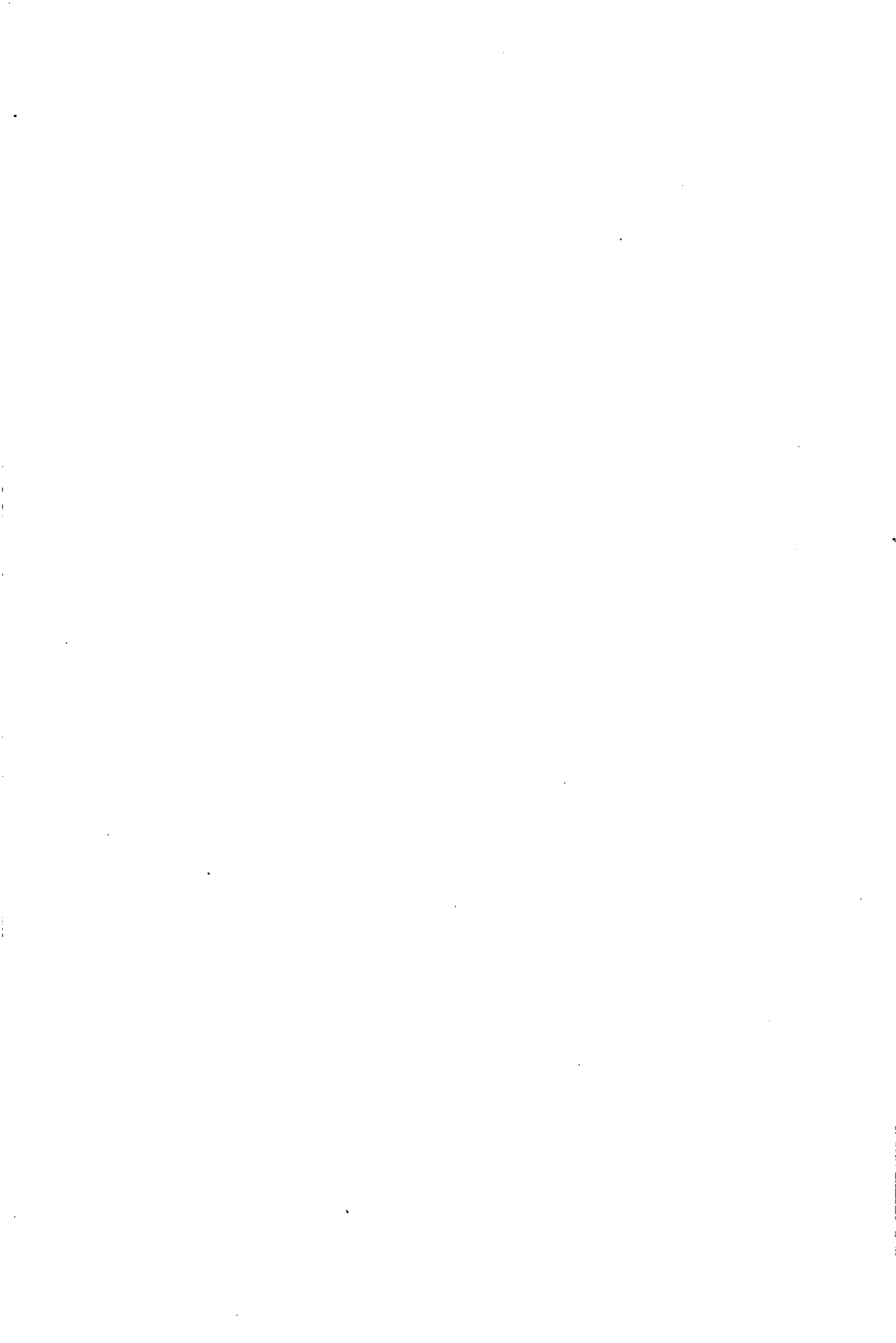
[9]) Die Sätze in den §§ 17—19 finden sich vielfach in Lehrbüchern und Abhandlungen. So leitet z. B. Sturm, cours d'analyse § 733, die beiden Sätze in § 18 und einen speciellen Fall von § 17 mit Hilfe des Calcul des différences finies ab. Die Sätze werden nicht immer vollständig und auch nicht immer ganz korrekt angeführt. Durchweg geschieht die Ableitung mittels der Differenzenrechnung.

[10]) Vergl. Klügel, math. Wörterbuch Artikel „arithmetische Reihen höherer Ordnung". Der Satz wird dort durch Untersuchung der Differenzenreihen für $n - m = 1$ bewiesen. In dem Artikel „Potenz" wird umgekehrt geschlossen: wenn

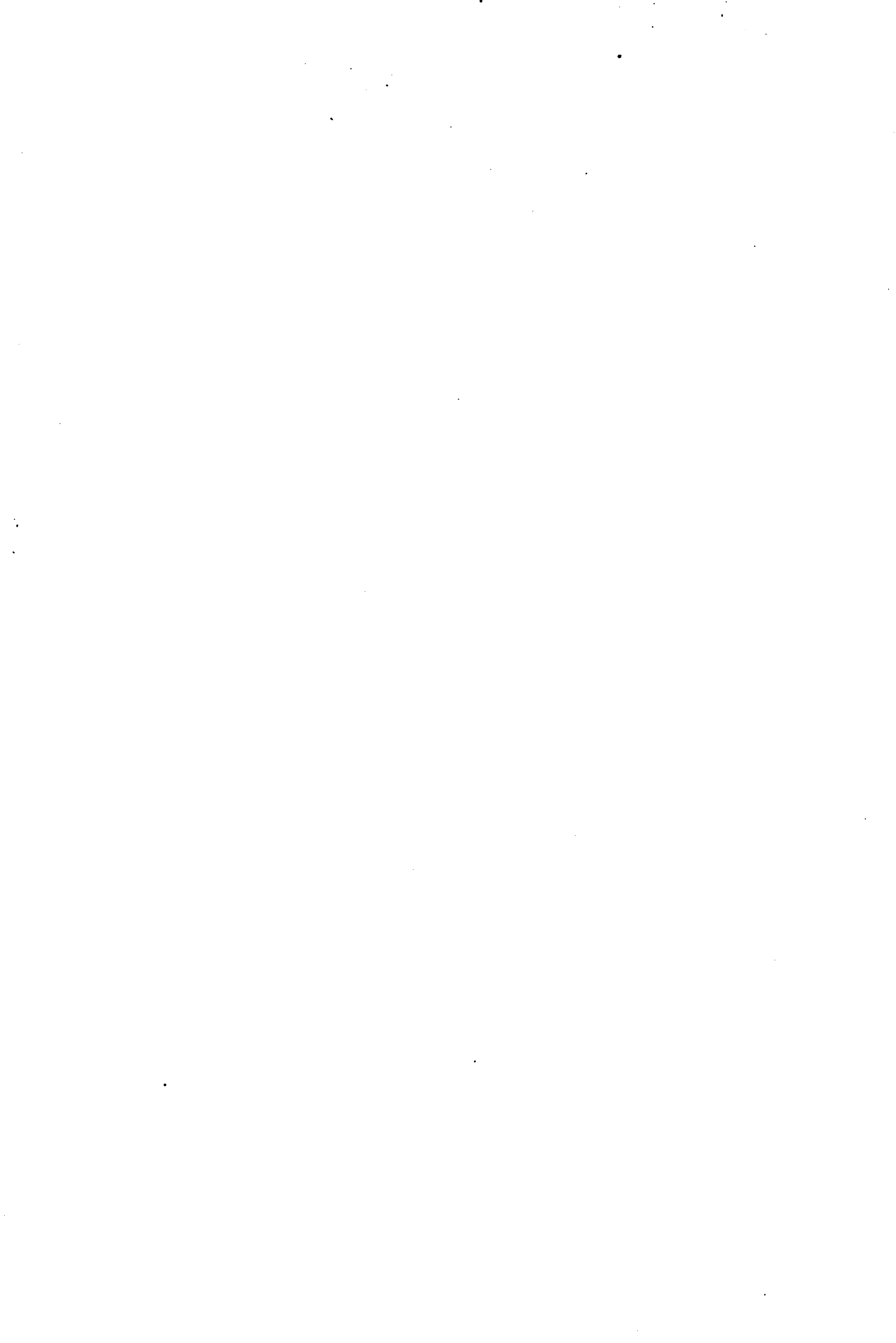
$$a - \binom{n}{1} b + \binom{n}{2} c - \binom{n}{3} d + \ldots = 0,$$

so sind a, b, c, d ... Glieder einer arithmetischen Reihe (n—1)-ter Ordnung, ein offenbar unkorrekter Schluss. Leider ist dies nicht der einzige und auch nicht der erheblichste Fehler dieses Buches.
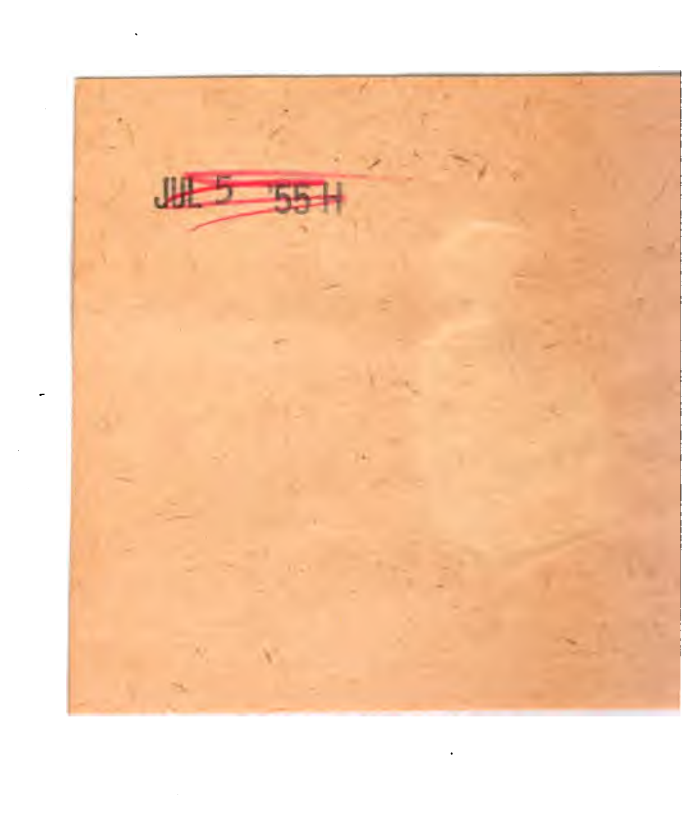
In Moivres doctrine of chances 1717 wird jener von Klügel angeführte specielle Fall des allgemeinen Satzes benutzt, um irgend ein Glied einer arithmetischen Reihe (n—1)-ter Ordnung aus den n vorhergehenden Gliedern zu finden.










JUL 5 '55 H

